

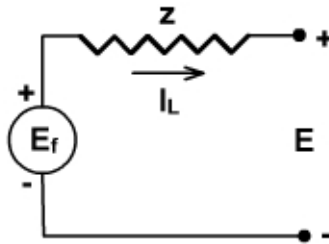
MODELADO DEL SISTEMA DE POTENCIA PARA EL ANÁLISIS DE FLUJO DE CARGA

ANÁLISIS DE UN CIRCUITO POR EL MÉTODO DE LOS NODOS

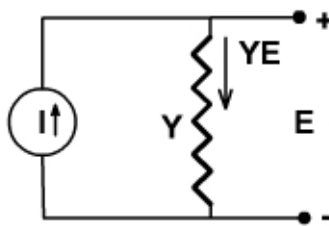
En el análisis nodal de un circuito lineal se calculan las tensiones de nodo del circuito (tomando como referencia uno de ellos). Siendo conocidas las corrientes que entran o salen y las admitancias de las ramas.

Equivalencia de fuentes

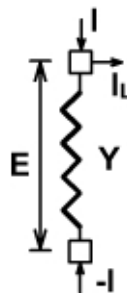
Una fuente de energía puede ser representada por una fuente de tensión constante en serie con su respectiva impedancia interna



$I_L = \frac{E_F - E}{Z} = \frac{E_F}{Z} - \frac{1}{Z}E$; si $I = \frac{E_F}{Z}$; $Y = \frac{1}{Z}$, se puede representar a la fuente como:



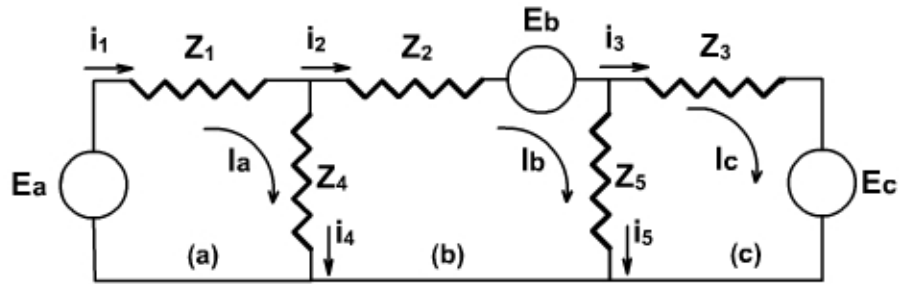
Tomando como positiva la corriente que llega a un nodo, el circuito de la figura puede representarse como:



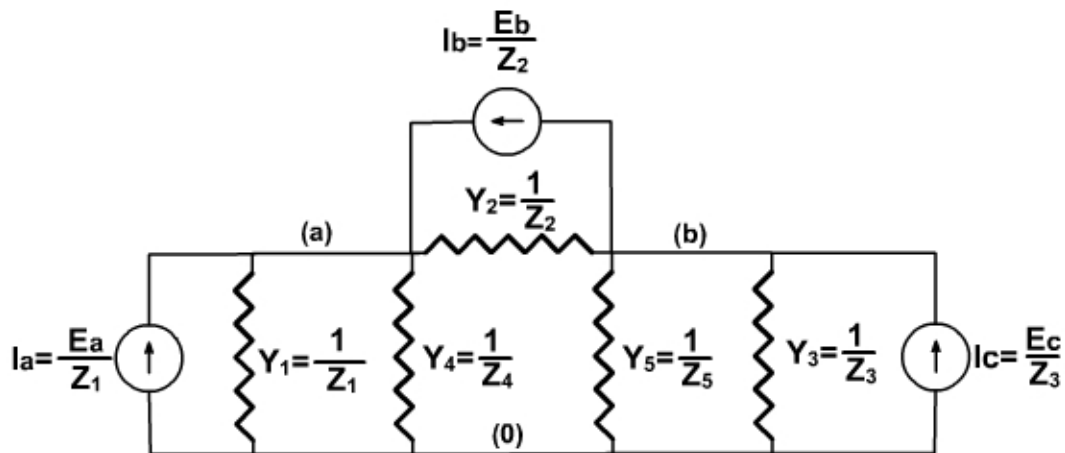
Aplicando la primera ley de **Kirchoff**, se obtienen las ecuaciones del circuito, pero el sistema resultante es indeterminado. Por esta razón se toma uno de los nodos como referencia eliminando la ecuación del mismo y salvando así la indeterminación.

De esta manera las tensiones de nodos quedan referidas. Normalmente se escoge como referencia a la tierra.

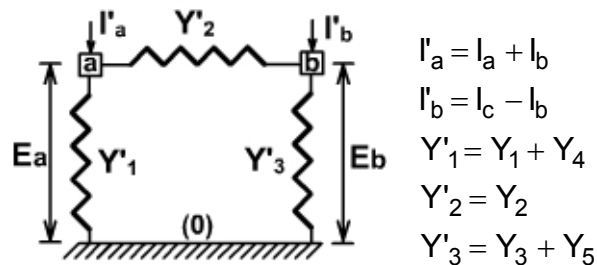
Ejemplo: En un circuito como el de la figura siguiente:



Aplicando la equivalencia de fuentes se obtiene:



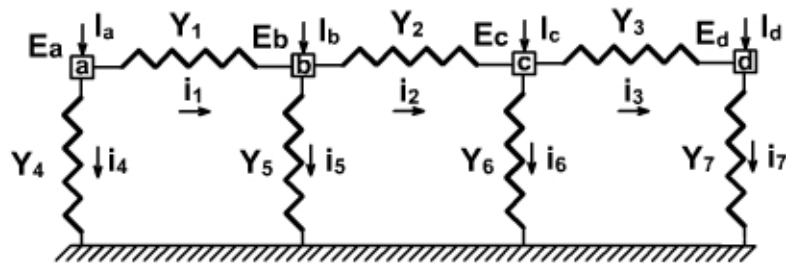
Si se toma como referencia (0), se reduce a :



Obsérvese que fue omitida la representación de la corriente en el nodo de referencia ya que su valor está dado en función de los valores de las demás corrientes.

Ecuaciones de nodo

Suponiendo hechas las equivalencias de las fuentes, se determinarán las ecuaciones para el siguiente circuito:



Aplicando la Ley de **Ohm**

$$\begin{aligned} i_1 &= (E_a - E_b) \cdot Y_1 \\ i_2 &= (E_b - E_c) \cdot Y_2 \\ i_3 &= (E_c - E_d) \cdot Y_3 \\ i_4 &= E_a \cdot Y_4 \\ i_5 &= E_b \cdot Y_5 \\ i_6 &= E_c \cdot Y_6 \\ i_7 &= E_d \cdot Y_7 \end{aligned}$$

Según la primera Ley de **Kirchoff**:

$$\begin{aligned} i_1 + i_4 &= I_a \\ -i_1 + i_2 + i_5 &= I_b \\ -i_2 + i_3 + i_6 &= I_c \\ -i_3 + i_7 &= I_d \end{aligned}$$

Sustituyendo y agrupando queda:

$$\begin{cases} (Y_1 + Y_4) \cdot E_a - Y_1 \cdot E_b = I_a \\ -Y_1 \cdot E_a + (Y_1 + Y_2 + Y_5) \cdot E_b - Y_2 \cdot E_c = I_b \\ -Y_2 \cdot E_b + (Y_2 + Y_3 + Y_6) \cdot E_c - Y_3 \cdot E_d = I_c \\ -Y_3 \cdot E_c + (Y_3 + Y_7) \cdot E_d = I_d \end{cases}$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} (Y_1 + Y_4) & -Y_1 & 0 & 0 \\ -Y_1 & (Y_1 + Y_2 + Y_5) & -Y_2 & 0 \\ 0 & -Y_2 & (Y_2 + Y_3 + Y_6) & -Y_3 \\ 0 & 0 & -Y_3 & (Y_3 + Y_7) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_a \\ E_b \\ E_c \\ E_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_d \end{bmatrix}$$

O sea: $[Y_N] [E_N] = [I_N]$

$[Y_N]$: es la **Matriz de Admitancia Nodal** del circuito. Los elementos de la diagonal principal son las admitancias propias de los nodos y los otros son las admitancias mutuas entre nodos.

La matriz de admitancia nodal, puede ser construida sin necesidad de plantear las ecuaciones, según las siguientes reglas:

a) Elementos de la diagonal principal:

Los elementos de subíndice "ii", son la suma de todas las admitancias conectadas al nodo "i".

b) Elementos fuera de la diagonal principal:

Los elementos de subíndices "ij", son las admitancias equivalentes conectadas entre los nodos "i" y "j", con signo negativo.

Transformadores con tomas de regulación distinto de nominal

Si la relación de transformación es 1:1, se considera como si fuera una línea con una impedancia igual a la impedancia de dispersión y con una admitancia igual a la inversa de la impedancia de magnetización, (esta última normalmente es despreciada). Si algún arrollamiento del transformador está regulado con una tensión distinta de la nominal, pueden presentarse dos casos:

a) La regulación modifica el módulo, pero no la fase de la tensión, en este caso la relación de transformación es 1: p donde "p" es el valor de la toma en p.u. y es un número real.

Ej: Transformadores con regulación bajo carga, donde la conmutación de las tomas es automática y depende de la tensión en las barras del transformador.

b) Se modifica la fase y el módulo de la tensión, en este caso la relación de transformación involucra números complejos: $1 : p+jq$, donde:

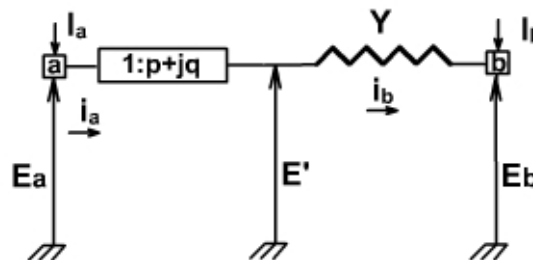
p = valor de la toma en fase en p.u.

q = valor de la toma en cuadratura en p.u.

Ej: Transformadores defasadores usados en el control del flujo de potencia activa en líneas.

El caso a) puede considerarse como un caso particular de b) en donde $q=0$, por eso se harán las consideraciones para este último caso.

Despreciando la impedancia de magnetización, un transformador con relación de transformación compleja se presenta como muestra la figura, donde "Y" es la admitancia de dispersión del lado "b" del transformador.



Los parámetros “transformación” y “dispersión”, se toman como concentrados, lo que es lo mismo que suponer que el transformador es ideal (sin pérdidas), entonces:

$$E_a \cdot i_a^* = E' \cdot i_b^* \quad [1]$$

$$E' = (p + jq) \cdot E_a \quad [2]$$

Reemplazando E' por su valor:

$$E_a \cdot i_a^* = (p + jq) \cdot E_a \cdot i_b^* \quad [3] \quad (* \text{ indica conjugado})$$

Por lo tanto:

$$i_a^* = (p + jq) \cdot i_b^*$$

O sea:

$$i_a = (p - jq) \cdot i_b \quad [4]$$

También:

$$i_b = (E' - E_b) \cdot Y = E' \cdot Y - E_b \cdot Y \quad [5]$$

Reemplazando E' por su valor:

$$i_b = (p + jq) \cdot Y \cdot E_a - Y \cdot E_b \quad [6]$$

Sustituyendo [6] en [4]:

$$i_a = (p^2 + q^2) \cdot Y \cdot E_a - (p - jq) \cdot Y \cdot E_b \quad [7]$$

Como: $i_a = I_a$, e $i_b = -I_b$; las [7] y [6] se pueden escribir:

$$I_a = (p^2 + q^2) \cdot Y \cdot E_a - (p - jq) \cdot Y \cdot E_b$$

$$I_b = -(p + jq) \cdot Y \cdot E_a + Y \cdot E_b$$

O en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} (p^2 + q^2) \cdot Y & -(p - jq) \cdot Y \\ -(p + jq) \cdot Y & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_a \\ E_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix}$$

Se puede concluir que cuando entre dos nodos, a y b , existe un transformador de relación $1 : p + jq$, y estando la regulación del lado b , la contribución de este a la matriz $[Y_N]$ del circuito se hace según:

a) La contribución al término aa de la diagonal principal es: $(p^2 + q^2) \cdot Y$

b) La contribución al término bb de la diagonal principal es: Y

c) La contribución al término ab fuera de la diagonal principal es: $-(p + jq) \cdot Y$

d) La contribución al término ba fuera de la diagonal principal es: $-(p + jq) \cdot Y$

FLUJO DE POTENCIA

La importancia de la realización de estudios de flujo de potencia se observa en la planificación de futuras redes o en la optimización del funcionamiento de una

red actual. Su información es necesaria para verificar la capacidad de un sistema de transferir energía sin sobrecargar líneas y transformadores y de regular la tensión por medio de capacitores, reactores, reguladores de transformadores o generadores.

De este estudio se obtiene, fundamentalmente:

- Flujo de MW y MVAR en cualquier elemento de la red.
- Módulo y ángulo de las tensiones en las diferentes barras.
- Pérdidas en el sistema de transmisión.
- Topes necesarios de los reguladores de tensión de los transformadores para obtener los niveles de tensión deseados.
- Necesidades de compensación.
- Necesidades de nuevo equipamiento.

Además, mediante el mismo se pueden analizar otras importantes cuestiones relativas a la operación de un sistema, como ser: Distribución económica de carga entre distintos sistemas, influencia del cambio de conductores, etc.

CALCULO DIGITAL DEL FLUJO DE POTENCIA

Suposiciones y aproximaciones

a) Las cargas activas y reactivas en las barras del sistema, son supuestas constantes ya que si varían, lo hacen en períodos largos de tiempo.

b) Se admite que el sistema trifásico opera en forma equilibrada y por lo tanto se lo representa unifilarmente.

c) Los elementos pasivos del sistema son representados por sus parámetros concentrados.

Representaciones

Generadores: Son representados por las potencias compuestas generadas:

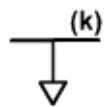


$$S_k^G = P_k^G + jQ_k^G$$

P_k^G = Potencia activa generada en la barra "k"

Q_k^G = Potencia reactiva generada en la barra "k"

Cargas: Se representan por las potencias complejas consumidas:

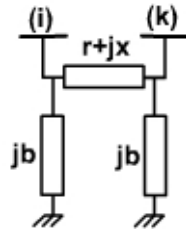


$$S_k^C = P_k^C + jQ_k^C$$

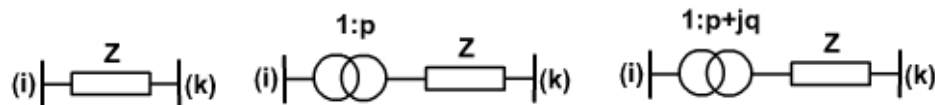
P_k^C = Potencia activa consumida en la barra "k"

Q_k^C = Potencia reactiva consumida en la barra "k"

Líneas de transmisión: Se representan por su circuito equivalente π normalmente con las suceptancias capacitivas incluidas:



Transformadores: Son representados por su impedancia de dispersión y, si hubiesen, se indica el estado de las tomas de regulación:



Capacitores o reactores shunt: Se representan por sus reactancias a referencia.

Potencia reactiva consumida
(+) para reactores; (-) para capacitores

$$Q_S^C = \frac{V^2}{Z_S^*}$$

Reactor	Capacitor
 $Z_S^* = -jX_L$ $Q_S^C = \frac{V^2}{-jX_L} = j \frac{V^2}{X_L} = j \frac{1}{X_L} \text{ p.u.}$	 $Z_S^* = jX_C$ $Q_S^C = \frac{V^2}{jX_C} = j \frac{-V^2}{X_C} = -j \frac{1}{X_C} \text{ p.u.}$

Por convención, se considera (+) a la potencia consumida por una carga inductiva.

Formulación matemática del problema

Prácticamente todos los métodos actuales se basan en el análisis nodal, pero en las ecuaciones se utilizan las potencias que llegan a un nodo y no las corrientes.

Cada nodo del sistema está caracterizado por seis variables:

P^G = potencia activa generada

Q^G = potencia reactiva generada

P^C = potencia activa consumida

Q^C = potencia reactiva consumida

V = módulo de la tensión

θ = ángulo de la tensión

El equilibrio de potencias en un nodo "i" del sistema es:

$$S_i^G - S_i^C - S_i^T = 0$$

S_i^G = Potencia compleja generada en el nodo "i"

S_i^C = Potencia compleja consumida en el nodo "i"

S_i^T = Potencia compleja transferida del nodo "i" al sistema.

La ecuación matricial que representa a las corrientes en los nodos es:

$$[Y_N] \cdot [E_N] = [I_N] \quad (\text{Ec.1})$$

$[Y_N]$ = Matriz de admitancia nodal del sistema.

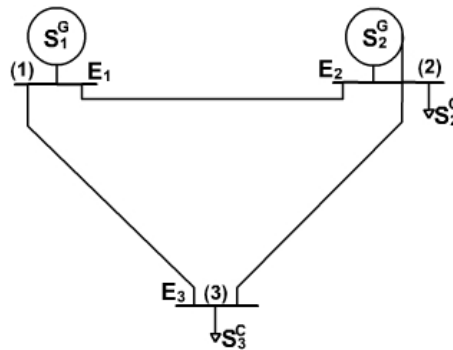
$[E_N]$ = Vector de las tensiones en los nodos del sistema.

$[I_N]$ = Vector de las corrientes inyectadas en los nodos del sistema.

Si las corrientes inyectadas fuesen conocidas, bastaría multiplicar $[I_N]$ por $[Y_N]^{-1}$ y se obtendrían las tensiones directamente, pero los datos que normalmente se tienen en los sistemas de potencia, son los valores de potencia generada y consumida, por lo tanto el valor de la corriente en cada nodo se debe reemplazar por:

$$\begin{aligned} S_i &= S_i^G - S_i^C \\ S_i &= E_i \cdot I_i^* \\ I_i &= \frac{S_i^*}{E_i} \end{aligned} \quad (\text{Ec.2})$$

Si en (Ec.1) reemplazamos las corrientes por la (Ec.2), se obtiene un sistema de ecuaciones no lineales, esto puede observarse con el siguiente ejemplo:



Desarrollando la (Ec.1) para este caso queda:

$$Y_{11} \cdot E_1 + Y_{12} \cdot E_2 + Y_{13} \cdot E_3 = I_1$$

$$Y_{21} \cdot E_1 + Y_{22} \cdot E_2 + Y_{23} \cdot E_3 = I_2$$

$$Y_{31} \cdot E_1 + Y_{32} \cdot E_2 + Y_{33} \cdot E_3 = I_3$$

En cada nodo la (Ec.2) es:

$$I_1 = \frac{S_1^*}{E_1^*} = \frac{(S_1^G)^*}{E_1^*}$$

$$I_2 = \frac{S_2^*}{E_2^*} = \frac{(S_2^G - S_2^C)^*}{E_2^*}$$

$$I_3 = \frac{S_3^*}{E_3^*} = \frac{(-S_3^C)^*}{E_3^*}$$

Reemplazando se obtiene:

$$\begin{cases} Y_{11} \cdot E_1 + Y_{12} \cdot E_2 + Y_{13} \cdot E_3 = \frac{(S_1^G)^*}{E_1^*} \\ Y_{21} \cdot E_1 + Y_{22} \cdot E_2 + Y_{23} \cdot E_3 = \frac{(S_2^G - S_2^C)^*}{E_2^*} \\ Y_{31} \cdot E_1 + Y_{32} \cdot E_2 + Y_{33} \cdot E_3 = \frac{(-S_3^C)^*}{E_3^*} \end{cases}$$

En un sistema de "n" nodos, las ecuaciones son:

$$\begin{cases} \sum_{K=1}^n Y_{1K} \cdot E_K = \frac{(S_1^G - S_1^C)^*}{E_1^*} \\ \sum_{K=1}^n Y_{2K} \cdot E_K = \frac{(S_2^G - S_2^C)^*}{E_2^*} \\ \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ \sum_{K=1}^n Y_{nK} \cdot E_K = \frac{(S_n^G - S_n^C)^*}{E_n^*} \end{cases}$$

A cada punto del sistema le corresponde una ecuación compleja. Para evitar tener que trabajar con números complejos, se separa cada ecuación en su parte real e imaginaria, tratando las dos ecuaciones resultantes como reales:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \left[\sum_{K=1}^n Y_{iK} \cdot E_K \right] &= \operatorname{Re} \left[\frac{(S_i^G - S_i^C)^*}{E_i^*} \right] \\ \operatorname{Im} \left[\sum_{K=1}^n Y_{iK} \cdot E_K \right] &= \operatorname{Im} \left[\frac{(S_i^G - S_i^C)^*}{E_i^*} \right] \end{aligned} \right\} \text{ Ecuaciones para el nodo "i"}$$

De esta forma un sistema con n nodos quedará representado por $2n$ ecuaciones no lineales.

Cada nodo del sistema está caracterizado por seis variables, de las cuales se pueden descontar las cargas que son supuestas fijas y conocidas. O sea que quedan $4n$ variables para $2n$ ecuaciones. Por lo tanto se prevé fijar dos variables más. Como el objetivo básico del cálculo de flujo de carga es la determinación de las tensiones en las barras del sistema, puede parecer que lo más lógico sea especificar las potencias generadas y dejar como incógnitas el módulo y ángulo de la tensión en cada nodo.

Pero en todo sistema eléctrico, operando en régimen permanente, debe existir equilibrio entre generación; consumo y pérdidas:

$$S_T^G - S_T^C - S_T^P = 0$$

$$S_T^G = \text{Potencia Total Generada}$$

$$S_T^C = \text{Potencia Total Consumida}$$

S_T^P = Potencia Total Perdida. Solo puede ser conocida una vez conocidas las tensiones en los nodos del sistema, por lo tanto no se pueden fijar de antemano todas las potencias activas y reactivas generadas, por lo menos una potencia activa y una reactiva deben quedar sin especificar para que las pérdidas del sistema puedan ser compensadas.

Según qué variables se determinen los nodos se pueden clasificar en tres tipos:

1) Nodos de Carga o tipo P-Q:

$$P_i^C \text{ y } Q_i^C = \text{Variables conocidas}$$

$$V_i \text{ y } \theta_i = \text{Variables a determinar}$$

2) Nodos de Generación o tipo P-V:

$$P_i^G \text{ y } V_i = \text{Variables conocidas}$$

$$Q_i^G \text{ y } \theta_i = \text{Variables a determinar}$$

3) Nodo de referencia o tipo "SWING":

$$V_i \text{ y } \theta_i = \text{Variables conocidas}$$

$$P_i^G \text{ y } Q_i^G = \text{Variables a determinar}$$

De lo anterior se pueden obtener dos vectores de variables, el vector $[u]$ para las llamadas variables de control (especificadas en cada nodo) y el vector $[x]$ para las variables de estado (a calcular en cada nodo).

$$|u| \begin{cases} P^G & y & Q^G & (\text{nudo } P - Q) \\ P^G & y & V & (\text{nudo } P - V) \\ V & y & \theta & (\text{nudo de referencia}) \end{cases}$$

$$|x| \begin{cases} V & y & \theta & (\text{nudo } P - Q) \\ Q^G & y & \theta & (\text{nudo } P - V) \\ P^G & y & Q^G & (\text{nudo de referencia}) \end{cases}$$

Se define además un vector “p” para el sistema que normalmente engloba las cargas activas, reactivas y los elementos de la matriz $[Y_N]$.

MÉTODOS DE SOLUCIÓN

CALCULO ITERATIVO DE TENSIONES (GAUSS Y GAUSS - SEIDEL)

Las ecuaciones del flujo de carga para un sistema de n nodos son:

$$\left[\sum_{k=1}^n Y_{ik} \cdot E_k = \frac{(S_i^G - S_i^C)^*}{E_i^*} \right] \quad (i=1,2,\dots,n) \quad \text{También:}$$

$$S_i^G - S_i^C = S_i = P_i + jQ_i$$

$$P_i = P_i^G - P_i^C$$

Reemplazando:

$$Q_i = Q_i^G - Q_i^C$$

$$\left[\sum_{k=1}^n Y_{ik} \cdot E_k = \frac{P_i - jQ_i}{E_i^*} \right] \quad (i=1,2,\dots,n)$$

Si se retira de la sumatoria el término correspondiente a $k = i$:

$$\left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n Y_{ik} \cdot E_k + Y_{ii} \cdot E_i = \frac{P_i - jQ_i}{E_i^*} \right] \quad (i=1,2,\dots,n)$$

o sea:

$$\left\{ E_i = \frac{1}{Y_{ii}} \cdot \left[\frac{P_i - jQ_i}{E_i^*} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n Y_{ik} \cdot E_k \right] \right\} \quad (i=1,2,\dots,n)$$

Los métodos de **Gauss** y **Gauss-Seidel**, utilizan este sistema de ecuaciones para calcular las tensiones nodales.

Se parte de valores estimativos de E_i ($i = 1,2,\dots,n$) sustituyendo esos valores en el segundo miembro de las ecuaciones para calcular nuevos valores de E_i que vuelven a ser utilizados para reemplazar hasta llegar a la convergencia.

Teniendo en cuenta la clasificación de los nodos se pueden hacer las siguientes consideraciones:

1) En el nodo de referencia es conocida la tensión en módulo y fase, por lo tanto no es necesario incluir su ecuación en el sistema.

Para facilitar la notación en adelante se tomará al nodo de referencia como número 1.

2) En los nodos de carga, tanto el módulo como el ángulo de la tensión son desconocidos. Las variables especificadas en tales nodos son la potencia activa y reactiva.

Para nodos P-Q, la ecuación es:

$$E_i = \frac{1}{Y_{ii}} \cdot \left[\frac{P_i^{\text{esp}} - jQ_i^{\text{esp}}}{E_i^*} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n Y_{ik} \cdot E_k \right] \quad (\text{"i"} \text{ toma valores solo de nodos P-Q})$$

El superíndice "esp" significa que la variable es especificada, o sea que se trata de un valor conocido de antemano.

3) En los nodos P-V el módulo de la tensión es conocido y el ángulo de la tensión y la potencia reactiva generada son desconocidos, por lo tanto es necesario calcular en cada iteración un valor aproximado para la potencia reactiva, compatible con el nivel de las tensiones en la iteración involucrada. O sea:

$$Q_i = \text{Im} (E_i \cdot I_i^*) = -\left[\text{Im} (E_i^* \cdot I_i) \right]$$

$$\text{Y siendo: } I_i = Y_{ik} \cdot E_k$$

$$\text{Queda: } Q_i = Q_i^{\text{calc}} = -\text{Im} (E_i^* \cdot \sum_{k=1}^n Y_{ik} \cdot E_k)$$

La ecuación para los nodos P-V es:

$$E_i = \frac{1}{Y_{ii}} \cdot \left[\frac{P_i^{\text{esp}} - jQ_i^{\text{calc}}}{E_i^*} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n Y_{ik} \cdot E_k \right] \quad (\text{"i"} \text{ toma valores solo de nodos P-V})$$

El valor de E_i calculado con esta ecuación no satisfará necesariamente la restricción: $|E_i| = |V_i^{\text{esp}}|$. Lo que se hace, entonces, es racionalizar el valor de E_i calculado, tomando $E_i^{\text{rac}} = |V_i^{\text{esp}}|^{\theta_i}$, donde θ_i es el ángulo de fase obtenido con la ecuación del nodo P-V.

ALGORITMO DE SOLUCIÓN

1 - Se estiman los valores iniciales para el vector de tensiones:

Generalmente:

Barras P-Q $\Rightarrow E_i = 1 + j0$

Barras P-V $\Rightarrow E_i = V_i^{\text{esp}} + j0$

2 - Se verifica la primera barra:

Si es P-V sigue en el paso 4

Si es P-Q sigue en el paso 3

3 - Calcular E_i con la ecuación de las barras P-Q:

$$E_i = \frac{1}{Y_{ii}} \cdot \left[\frac{P_i^{\text{esp}} - Q_i^{\text{esp}}}{E_i^*} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n Y_{ik} \cdot E_k \right]$$

Las tensiones del segundo miembro son las correspondientes al vector de tensiones obtenido en la iteración anterior o las iniciales si se trata de la primera iteración.

Continuar en el paso 6.

4 - Calcular E_i con la ecuación de las barras P-V, para esto se debe obtener primero:

$$Q_i^{\text{calc}} = -\text{Im} (E_i^* \cdot \sum_{k=1}^n Y_{ik} \cdot E_k), \text{ y luego: } E_i = \frac{1}{Y_{ii}} \cdot \left[\frac{P_i^{\text{esp}} - Q_i^{\text{calc}}}{E_i^*} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n Y_{ik} \cdot E_k \right]$$

5 - Racionalizar el valor de E_i obtenido en 4:

$$E_i^{\text{rac}} = |V_i^{\text{esp}}| \angle \theta_i$$

6 - Repetir los pasos del 2 en adelante, hasta que $i = n$, de esta manera se realizó una iteración, seguir en 7.

7 - Verificar si hay convergencia con la siguiente condición: $\left| E_i^j - E_i^{j-1} \right| < \varepsilon$ $(i=1,2,\dots,n)$, en donde: j = número de la última iteración realizada

ε = tolerancia especificada, $10^{-3} > \varepsilon > 10^{-6}$

Si para todas las barras del sistema se cumple con la condición de convergencia, el sistema ha sido resuelto. Si no repetir todo a partir del paso 2.

En el método de **Gauss**, luego de cada iteración, todos los valores del vector de tensiones son reemplazados por los nuevos valores hallados, esto se denomina **sustitución simultánea**.

En el método de **Gauss-Seidel**, cada vez que se obtiene un valor de tensión es incluido en el vector de tensiones para el cálculo de las otras barras dentro de la misma iteración. En este caso se realiza una **sustitución sucesiva**.

Tanto el método de **Gauss**, como el de **Gauss-Seidel**, convergen de manera lenta hasta alcanzar el valor final. Para acelerar el proceso se utilizan factores de aceleración. Los aceleradores amplían la variación entre los valores de tensión de una iteración a otra.

El método más usado es la aceleración por extrapolación lineal:

$$E_{iAC}^j = \left[\alpha(E_i^j - E_{iAC}^{j-1}) + E_{iAC}^{j-1} \right]_{(i=2,3,\dots,n)} \quad j = \text{número de iteración}$$

E_{iAC}^j = Tensión modificada por el factor de aceleración para la iteración número "j"

α = factor de aceleración : $(1 < \alpha < 2)$ generalmente $\alpha = 1,6$.

MÉTODO DE NEWTON_RAPHSON

Forma polar de las ecuaciones de potencia

La corriente inyectada en cualquier barra "i" es: $I_i = \sum_k Y_{ik} \cdot E_k$

Donde los términos de la matriz admitancia de barra son:
$$\begin{cases} Y_{ii} = \sum_i y_{ii} \\ Y_{ik} = -y_{ik} \end{cases}$$

Y por definición: $S_i = P_i + jQ_i = E_i \cdot I_i^* = E_i \cdot \sum_k Y_{ik}^* E_k^*$, donde:

$E_k = V_k \cdot \cos \delta_k + jV_k \cdot \sin \delta_k$ y las ecuaciones de potencia para la barra "i", en forma polar, son:

$$\left. \begin{aligned} P_i &= \sum_k V_i \cdot V_k \cdot (G_{ik} \cdot \cos \delta_{ik} + B_{ik} \cdot \sin \delta_{ik}) \\ Q_i &= \sum_k V_i \cdot V_k \cdot (G_{ik} \cdot \sin \delta_{ik} - B_{ik} \cdot \cos \delta_{ik}) \end{aligned} \right\} \quad \delta_{ik} = \delta_i - \delta_k \quad [\text{Ec.A}]$$

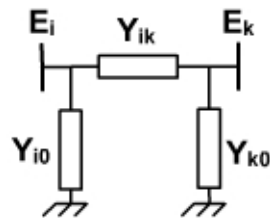
El sistema de ecuaciones a resolver para la solución del flujo de potencia de n barras de las cuales, m son barras de carga; n-m son barras de generación y una de estas es la barra de referencia, es el siguiente:

$$P_i = P_i(\bar{V}, \bar{\delta}) \quad i = 2, \dots, n$$

$$Q_i = Q_i(\bar{V}, \bar{\delta}) \quad i = 2, \dots, n$$

Este sistema de ecuaciones se lo expresa mediante las ecuaciones [Ec.A], de en forma polar las que son un sistema de ecuaciones no lineales y requieren de técnicas iterativas de solución tales como de Gauss o Newton Raphsón.

La solución de este sistema de ecuaciones es la solución del flujo de potencia, ya que se determinan las variables de estado de la red, con lo cual es posible luego calcular fácilmente los flujos de potencia por los elementos, las pérdidas en la generación de la barra oscilante y la generación reactiva en las barras de voltaje controlado, así el flujo de potencia conectado entre una barra i y k es:



$$S_i = E_i \cdot I_{ik}^* = E_i \cdot [(E_i^* - E_k^*) \cdot y_{ik}^* + E_i^* \cdot y_{i0}]$$

La potencia generada por la barra de referencia es: $S_1 = E_1 \cdot I_1^* = E_1 \cdot \sum_k Y_{1k}^* \cdot E_k^*$

La potencia reactiva generada en las barras de tensión controlada:

$$Q_i = \text{Im} \left(E_i \cdot I_i^* \right) = \text{Im} \left(E_i \cdot \sum_k Y_{ik}^* \cdot E_k^* \right) \text{ y la potencia activa de pérdidas: } P_L = \sum_i P_i$$

La potencia reactiva de pérdidas es la sumatoria de todas las fuentes de potencia reactiva (generadores, líneas, condensadores), menos la sumatoria de la potencia activa de la carga.

Método de solución del flujo de potencia

El método de Newton Raphsón transforma el sistema no lineal de ecuaciones en un conjunto de ecuaciones lineales y mediante un proceso iterativo se llega a la solución del problema.

La linealización de las ecuaciones se basa en la expansión de las funciones no lineales en series de Taylor alrededor del punto de solución.

Así el sistema no lineal de ecuaciones en forma polar se transforma en :

$$\begin{aligned} \Delta P_i &= \sum_k \frac{\partial P_i}{\partial \delta_k} \cdot \Delta \delta_k + \sum_k \frac{\partial P_i}{\partial V_k} \cdot \Delta V_k \quad i = 2, \dots, n \\ \Delta Q_i &= \sum_k \frac{\partial Q_i}{\partial \delta_k} \cdot \Delta \delta_k + \sum_q \frac{\partial Q_i}{\partial V_k} \cdot \Delta V_k \quad i = 2, \dots, n \end{aligned} \quad [\text{Ec.A}]$$

Y en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \Delta \bar{P} \\ \Delta \bar{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & N \\ J & L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \bar{\delta} \\ \Delta \bar{V} \\ V \end{bmatrix} \quad \text{Esta expresión nos da las ecuaciones de flujo de potencia}$$

por el método de Newton Raphson. La matriz $\begin{bmatrix} H & N \\ J & L \end{bmatrix}$ es el llamado **Jacobiano** y se construye de la siguiente manera:

Los términos de la diagonal principal son:

$$\begin{aligned} H_{ii} &= \frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} = -Q_i - B_{ii} \cdot V_i^2 \quad i = 2, \dots, n \\ N_{ii} &= \frac{\partial P_i}{\partial V_i} \cdot V_i = P_i + G_{ii} \cdot V_i^2 \quad i = 2, \dots, n \\ J_{ii} &= \frac{\partial Q_i}{\partial \delta_i} = P_i - G_{ii} \cdot V_i^2 \quad i = 2, \dots, n \\ L_{ii} &= \frac{\partial Q_i}{\partial V_i} \cdot V_i = Q_i - B_{ii} \cdot V_i^2 \quad i = 2, \dots, n \end{aligned} \quad [\text{Ec.B}]$$

Los elementos fuera de la diagonal son:

$$\begin{aligned}
 H_{ik} &= \frac{\partial P_i}{\partial \delta_k} = V_i \cdot V_k \cdot (G_{ik} \cdot \text{sen} \delta_{ik} - B_{ik} \cdot \cos \delta_{ik}) \\
 N_{ik} &= \frac{\partial P_i}{\partial V_k} \cdot V_k = V_i \cdot V_k \cdot (G_{ik} \cdot \cos \delta_{ik} + B_{ik} \cdot \text{sen} \delta_{ik}) \\
 J_{ik} &= \frac{\partial Q_i}{\partial \delta_k} = -V_i \cdot V_k \cdot (G_{ik} \cdot \cos \delta_{ik} + B_{ik} \cdot \text{sen} \delta_{ik}) \\
 L_{ik} &= \frac{\partial Q_i}{\partial V_k} \cdot V_i = V_i \cdot V_k \cdot (G_{ik} \cdot \text{sen} \delta_{ik} - B_{ik} \cdot \cos \delta_{ik})
 \end{aligned}
 \quad [\text{Ec.C}]$$

Una observación: se debe tener muy en cuenta que los términos,

$$H_{ik} = L_{ik}$$

$$N_{ik} = -J_{ik}$$

Los subíndices i,k varían para:

$$H_{ik} \text{ (i, k = 2,...n)}$$

$$N_{ik} \text{ (i = 2,...n, k = 2,...m)}$$

$$J_{ik} \text{ (i = 2,...m, k=2,...n)}$$

$$L_{ik} \text{ (i, k = 2,...m), en todos los casos } i \neq k$$

Algoritmo para la solución del método Newton Raphson

Se ha establecido anteriormente que el flujo de potencia no es sino un conjunto de ecuaciones no lineales y que aplicando el método de Newton Raphson se las linealiza asumiendo valores iniciales.

En general hemos visto que estas ecuaciones lineales tiene la forma: $\Delta \bar{S} = |J| \cdot \Delta \bar{E}$

Procesos:

1.- Leer los datos de entrada (topología de la red, impedancia de elementos, potencia y voltajes especificados según el tipo de barra).

2.- Formar la matriz admitancia de barra Y_B .

3.- Asumir valores iniciales para todos los voltajes: $E_{B(0)}(v, \delta_o, f)$.

4.- Calcular las diferencias: $\Delta S(\Delta P, \Delta Q)$

$$\Delta P = P_{\text{especificado}} - P_{\text{calculado}}$$

$$\Delta Q = Q_{\text{especificado}} - Q_{\text{calculado}}$$

Para calcular los valores de P y Q calculados se los determina mediante el empleo de las ecuaciones [Ec.A].

5.- Evaluar los términos del **Jacobiano** H, N, J, L, con las ecuaciones [Ec.B] y [Ec.C], para la forma polar.

6.- Efectuar la operación: $\Delta \bar{E} = |J|^{-1} \cdot \Delta S$

7.- Calcular los nuevos voltajes: $\bar{E}_B = \bar{E}_{B(0)} + \Delta \bar{E}$

8.- Calcular la potencia reactiva de las barras de generación y determinar si excede los límites, en caso de que esto ocurra cambiarla a barra de carga haciendo $Q = Q_{\text{lím}}$; en este caso la barra de generación no puede mantener el voltaje especificado.

En la siguiente iteración hay que probar si puede mantener voltaje con el valor de V_i calculado y volverla a barra PV, si hay cambio de tipo de barra volver a 4, caso contrario continuar.

9.- Probar convergencia $\Delta E \leq \varepsilon$ o también $\Delta P, \Delta Q \ll \varepsilon$

10.- Si no existe convergencia volver a 4, caso contrario E_B es la solución del flujo de potencia.

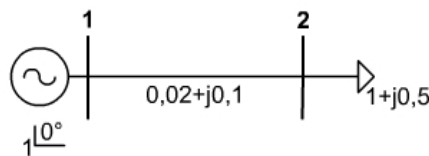
11.- Calcular el flujo de potencia por los elementos, la potencia generada por la barra oscilante, la potencia reactiva de las barras de tensión controlada y las pérdidas del sistema.

El número de iteraciones es prácticamente independiente del sistema, debido a sus características de convergencia.

El tiempo por iteración crece linealmente con el número de barras, por tanto el tiempo total de solución varía con N .

Ejemplo:

Resolución del siguiente sistema de potencia utilizando el método de Newton-Raphson.



$$P_i = \sum_{k=1}^n V_i \cdot V_k \cdot (G_{ik} \cdot \cos \delta_{ik} + B_{ik} \cdot \sin \delta_{ik}); \quad Q_i = \sum_{k=1}^n V_i \cdot V_k \cdot (G_{ik} \cdot \sin \delta_{ik} - B_{ik} \cdot \cos \delta_{ik})$$

Para el sistema propuesto:

$$P_2 = V_2^2 \cdot G_{22} + V_2 \cdot V_1 \cdot (G_{21} \cdot \cos \delta_{21} + B_{21} \cdot \sin \delta_{21})$$

$$Q_p = -V_2^2 \cdot B_{22} + V_2 \cdot V_1 \cdot (G_{21} \cdot \sin \delta_{21} + B_{21} \cdot \cos \delta_{21}) \quad \text{siendo } \delta_1 = 0^\circ, \text{ tenemos:}$$

$$P_2 = V_2^2 \cdot G_{22} + V_2 \cdot V_1 \cdot (G_{21} \cdot \cos \delta_2 + B_{21} \cdot \sin \delta_2)$$

$$Q_p = -V_2^2 \cdot B_{22} + V_2 \cdot V_1 \cdot (G_{21} \cdot \sin \delta_2 + B_{21} \cdot \cos \delta_2)$$

$$y_{12} = \frac{1}{0,02 + j0,1} = 1,923 - j9,6154$$

$$Y_B = \begin{vmatrix} Y_{11} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,923 - j9,6154 & -1,923 + j9,6154 \\ -1,923 + j9,6154 & 1,923 - j9,6154 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta Q_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial P_2}{\partial \delta_2} & \frac{\partial P_2}{\partial V_2} \cdot V_2 \\ \frac{\partial Q_2}{\partial \delta_2} & \frac{\partial Q_2}{\partial V_2} \cdot V_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Delta \delta_2 \\ \frac{\Delta V_2}{V_2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta Q_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -Q_2 - V_2^2 \cdot B_{22} & P_2 + V_2^2 \cdot G_{22} \\ P_2 - V_2^2 \cdot G_{22} & Q_2 - V_2^2 \cdot B_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Delta \delta_2 \\ \frac{\Delta V_2}{V_2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \Delta \delta_2 \\ \frac{\Delta V_2}{V_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -Q_2 - V_2^2 \cdot B_{22} & P_2 + V_2^2 \cdot G_{22} \\ P_2 - V_2^2 \cdot G_{22} & Q_2 - V_2^2 \cdot B_{22} \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta Q_2 \end{vmatrix}$$

Primera Iteración: Sean, $V_{20} = 0,98$ y $\delta_{20} = -5^\circ$:

$$\begin{aligned} \Delta P_2 &= P_2 - P_2(V_{20}, \delta_{20}) \\ &= P_2 - [V_{20}^2 \cdot G_{22} + V_2 \cdot V_1 (G_{21} \cdot \cos \delta_{20} + B_{21} \cdot \sin \delta_{20})] \\ &= -1 - [0,98^2 \cdot 1,923 + 0,98 \cdot 1(-1,923 \cdot \cos(-5^\circ) - 9,6154 \cdot \sin(-5^\circ))] \\ &= -0,1482 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta Q_2 &= Q_2 - Q_2(V_{20}, \delta_{20}) \\ &= Q_2 - [-V_{20}^2 \cdot B_{22} + V_2 \cdot V_1 (G_{21} \cdot \sin \delta_{20} - B_{21} \cdot \cos \delta_{20})] \\ &= -0,5 - [-(0,98)^2 \cdot (-9,6154) + 0,98 \cdot 1(-1,923 \cdot \sin(-5^\circ) - 9,6154 \cdot \cos(-5^\circ))] \\ &= -0,5116 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} \Delta \delta_2 \\ \frac{\Delta V_2}{V_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9,735 & 0,847 \\ -2,847 & 8,735 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} -0,1482 \\ -0,5116 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -9,85 \cdot 10^{-3} \\ -0,0618 \end{vmatrix}$$

$$\delta_{21} = \delta_{20} + \Delta \delta_2 = -5^\circ + 9,85 \cdot 10^{-3} = -4,99^\circ$$

$$V_{21} = V_{20} \cdot \left(1 + \frac{\Delta V_2}{V_{20}}\right) = 0,98 \cdot (1 - 0,0618) = 0,9194$$

Segunda Iteración:

$$\begin{aligned}
\Delta P_2 &= P_2 - P_2(V_{2_1}, \delta_{2_1}) \\
&= P_2 - \left[V_{2_1}^2 \cdot G_{22} + V_2 \cdot V_1 (G_{21} \cdot \cos \delta_{2_1} + B_{21} \cdot \sin \delta_{2_1}) \right] \\
&= -1 - \left[0,9194^2 \cdot 1,923 + 0,9194 \cdot 1 (-1,923 \cdot \cos(-4,99^\circ) - 9,6154 \cdot \sin(-4,99^\circ)) \right] \\
&= -8,67 \cdot 10^{-3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta Q_2 &= Q_2 - Q_2(V_{2_1}, \delta_{2_1}) \\
&= Q_2 - \left[-V_{2_1}^2 \cdot B_{22} + V_2 \cdot V_1 (G_{21} \cdot \sin \delta_{2_1} - B_{21} \cdot \cos \delta_{2_1}) \right] \\
&= -0,5 - \left[-(0,9194)^2 \cdot (-9,6154) + 0,9194 \cdot 1 (-1,923 \cdot \sin(-5,564^\circ) - 9,6154 \cdot \cos(-5,564^\circ)) \right] \\
&= -9,587 \cdot 10^{-4}
\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\Delta \delta_2}{\Delta V_2} \\ \frac{\Delta V_2}{V_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8,629 & 0,626 \\ -2,626 & 7,629 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} -8,67 \cdot 10^{-3} \\ -9,587 \cdot 10^{-4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -9,71 \cdot 10^{-4} \\ -4,6 \cdot 10^{-4} \end{vmatrix}$$

$$\delta_{2_2} = \delta_{2_1} + \Delta \delta_2 = -5,564^\circ - 0,056^\circ = -5,62^\circ$$

$$V_{2_2} = V_{2_1} \cdot \left(1 + \frac{\Delta V_2}{V_{2_1}} \right) = 0,9194 \cdot (1 - 4,6 \cdot 10^{-4}) = 0,919$$

De donde se obtiene que: $\delta_2 = -5,62^\circ$ con $\varepsilon < 0,001$
 $V_2 = 0,919$ con $\varepsilon < 0,001$

Determinación de la potencia inyectada en el nodo 1:

$$P_1 = V_1^2 \cdot G_{11} + V_1 \cdot V_2 \cdot (G_{12} \cdot \cos \delta_{12} + B_{12} \cdot \sin \delta_{12})$$

$$P_1 = 1^2 \cdot 1,923 + 1 \cdot 0,919 \cdot (-1,923 \cdot \cos(5,92^\circ) + 9,6154 \cdot \sin(5,92^\circ)) = 1,0766$$

$$Q_1 = -V_1^2 \cdot B_{11} + V_1 \cdot V_2 \cdot (G_{12} \cdot \sin \delta_{12} - B_{12} \cdot \cos \delta_{12})$$

$$Q_1 = -(1)^2 \cdot (-9,6154) + 1 \cdot 0,919 \cdot (-1,923 \cdot \sin(5,92^\circ) - 9,6154 \cdot \cos(5,92^\circ)) = 0,644$$

Potencia de pérdidas: $\begin{cases} P_L = 1,0766 - 1 = 0,0766 \\ Q_L = 0,644 - 0,5 = 0,144 \end{cases}$